Analiza matematyczna
Lista 5 (rozwijanie funkcji w szeregi potęgowe)

Zad 1. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć podane granice

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2^x+1)}{x}$, b) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln\sin(\frac{\pi x}{2})}{\ln x}$, c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(x-\frac{\pi}{2})\operatorname{tg}x$,

d) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x})$, e) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$, f) $\lim_{x\to\infty} x\operatorname{arcctg}x$,

g) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$, h) $\lim_{x\to 0^-}(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{x}}$, i) $\lim_{x\to 1}\frac{x^{10}-10x+9}{x^5-5x+4}$,

j) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$, k) $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln x}$, l) $\lim_{x\to 1}(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1})$,

Zad 2. Określić przedział zbieżności szeregu

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n5^n}$, c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}(x+2)^n$,

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n\cdot 4^{n+1}}x^n$, e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^n}x^n$, f) $\sum_{n=0}^{\infty}n!(x-102)^n$.

Zad 3. Napisać wzór na rozwinięcie funkcji $f(x)$ w szereg Taylora w punkcie x_0 z n-tą resztą Lagrange'a, gdzie

a) $f(x)=x^5+2x^3-3x+1$, $x_0=-1$, $n=4$, b) $f(x)=x^3$, $x_0=1$, $n=4$

c) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x_0=1$, $n=2$, d) $f(x)=\sin(2x)$, $x_0=\pi$, $n=3$,

e) $f(x)=e^{-x}$, $x_0=0$, $n=5$, f) $f(x)=\sqrt[5]{1+x}$, $x_0=-2$, $n=3$.

Zad 4. Rozwinąć w szereg Maclaurina podane funkcje

a) $f(x)=\frac{1}{1-x}$, b) $f(x)=xe^x$, c) $f(x)=\cos x$, d) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

e) $f(x)=\operatorname{tg}x$, f) $f(x)=\ln(1+x)$, g) $f(x)=\frac{x^3+2x}{x^2-2}$, h) $f(x)=\frac{x}{3-x}$

Zad 5. Oszacować dokladność podanych wzorów przybliżonych we wskazanych przedziałach

a) $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$, $|x|\le 1$,

b) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$, $|x|\le\frac{1}{4}$,

c) $\ln(1-x)\approx -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$, $|x|\le 0,1$,

Zad 6. Stosując wzór Maclaurina obliczyć:

a) $\sin(0.1)$ z dokładnością 10^{-5}, b) $\frac{1}{e}$ z dokładnością 10^{-3},

c) $\ln(1.1)$ z dokładnością 10^{-4}, d) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ z dokładnością 10^{-3},

e) $\sqrt[3]{0.997}$ z dokładnością 10^{-3}, f) $\cos\frac{\pi}{32}$ z dokładnością 10^{-4},

Literatura:

- M. Gewert, Z. Skoczylas „*Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania*" Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2008; str. 155-168
- W.Krysicki, L. Włodarski „*Analiza matematyczna w zadaniach. Część I*" PWN, Warszawa 1998; rozdziały XI, XII